فصل اول: مقدمه

- ربات: دستگاهی الکترو-مکانیکی برای انجام وظایف گوناگون است. یک ماشین که می‌تواند برای عمل به دستورهای گوناگون برنامه‌ریزی گردد و یا یک سری کارهای ویژه انجام دهد. به ویژه آن دسته از کارها که فراتر از توانایی‌های طبیعی و سرشتی بشر باشند.
- توصیف مکان و جهتگیری: به منظور توصیف مکان و جهتگیری هر جسم در فضا، همواره یک دستگاه مختصات یا چهارچوب را به صورت صلب به جسم متصل می‌کنیم. سپس به توصیف مکان و جهتگیری این چهارچوب نسبت به دستگاه مختصات مرجع خواهیم پرداخت.
- سینماتیک مستقیم بازوهای مکانیکی سایر: سینماتیک علم حرکت است و حرکت را بدون در نظر گرفتن نیروهای بوجودآورنده آن مطالعه می‌کند.
- بازوهای مکانیکی سایر، از رابطهای نسبتاً صلبی تشکیل می‌شوند که بوسیله مفصلهایی که حرکت نسبی رابطهای مجاور را ممکن می‌سازند به یکدیگر اتصال یافته‌اند. این مفصلها معمولاً به حسگرهای مکان (سنسورها) نسبی مجهزند. در حالتی که مفصل از نوع چرخشی یا لولایی باشد جابه‌جایی نوعی مفصلی می‌باشد. برخی از بازوهای مکانیکی سایر، مفصل لغزشی یا کشویی دارند که در آنها جابه‌جایی نسبی رابطها از نوع انتقال است و انحراف مفصلی نام دارند.
- درجات آزادی dof: تعداد متغیرهای مکانی مستقل که باید برای تعیین مکان و جهتگیری کلیه قسمت‌های مکانیزم مشخص شوند. چون بازوی مکانیکی سایر یک زنجیره سینماتیکی باز است و چون مکان هر مفصل معمولاً تنها با یک متغیر توصیف می‌شود، تعداد درجات آزادی با تعداد مفصل‌ها برابر خواهد بود.
- مجری نهایی end-effector: درانتهای آزاد زنجیره رابطهای تشکیل دهنده بازوی مکانیکی سایر قرار دارد. برحسب کاربرد ربات مجری نهایی می‌تواند گیره یا چنگک، مشعل جوشکاری، آهنربای الکتریکی و ... باشد.
مکان بازوی مکانیکی سایر را با توصیف چهارچوب ابزار که مجری نهایی متصل است، نسبت به چهارچوب پایه که به پایه غیرمتحرک بازو اتصال دارد تعیین می‌گردد.
- سینماتیک مستقیم: چنانچه یک دسته زاویه مفصلی داده شده باشد، محاسبه مکان و جهتگیری چهارچوب ابزار نسبت به چهارچوب پایه، تغییر نمایش مکان بازوی مکانیکی سایر از فضای مفصلی به فضای دکارتی تعبیر می‌شود.
- سینماتیک وارون: چنانچه مکان و جهتگیری مجری نهایی بازوی مکانیکی سایر داده شده باشد، کلیه مجموعه‌های زوایای مفصلی ممکن را که می‌توانند برای رساندن بازوی مکانیکی سایر به مکان و جهتگیری مفروض مورد استفاده قرار گیرد، محاسبه گردد.
- ماتریس توکوی: نگاشتی از سرعت‌ها از فضای مفصلی به فضای دکارتی است.
- نقاط تکین: نقاط معینی که نگاشت فوق وارون ناپذیر است. تکینگی به بازوی ربات اجازه نمی‌دهند در هر مکانی در فضای کاری قرار گیرد.
- دینامیک: نیروهای پدیده آورنده حرکت مورد مطالعه قرار می‌گیرند.
- نمادگذاری: متغیرهای با حروف بزرگ نشان دهنده بردار یا ماتریس اند و متغیرهای با حروف کوچک اسکالر اند. پیش زیرنویس و پیش زبر نویس ایفا کننده دستگاه مختصات اند $^{A}_{B}R$. پس زیرنویس برای وارون یا ترانهاده اند R^T. پس زیرنویس و لغزک بردار یا توصیف اند P_x

فصل دوم: توصیف و تبدیل های فضای کلی

- توصیف مکان: مقادیر عددی مؤلفه های ${}^{A}P$، فواصل را در راستای محورهای $\{A\}$ نشان می دهند. $\quad {}^{A}P=\begin{bmatrix}P_x\\P_y\\P_z\end{bmatrix}$
هر یک از این فاصله ها را می توان تصویر بردار مورد نظر روی محور متناظر با آن، در نظر گرفت.

- توصیف جهتگیری: برای توصیف جهتگیری جسم، دستگاه مختصاتی را به آن متصل می کنیم. سپس این دستگاه را نسبت به دستگاه مرجع تعریف می کنیم. توصیف دستگاه مختصات $\{B\}$ متصل به جسم، نوشتن بردارهای یکه سه محور اصلی آن نسبت به دستگاه مختصات $\{A\}$ است. اگر این سه بردار را به صورت ستون های یک ماتریس ۳×۳ (به ترتیب ${}^{A}\hat{X}_B$، ${}^{A}\hat{Y}_B$ و ${}^{A}\hat{Z}_B$) نشان می دهیم. این ماتریس را ماتریس دوران می نامیم (${}^{A}_{B}R$) مؤلفه های هر بردار، تصاویر آن بردار در راستاهای یکه چهارچوب مرجع آن هستند. مؤلفه های ماتریس دوران را کسینوس های زاویه می نامند.

$${}^{A}_{B}R=[{}^{A}\hat{X}_B\ \ {}^{A}\hat{Y}_B\ \ {}^{A}\hat{Z}_B]=\begin{bmatrix}\hat{X}_B\cdot\hat{X}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{X}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{X}_A\\ \hat{X}_B\cdot\hat{Y}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{Y}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{Y}_A\\ \hat{X}_B\cdot\hat{Z}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{Z}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{Z}_A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}^{B}X_A^T\\ {}^{B}Y_A^T\\ {}^{B}Z_A^T\end{bmatrix} \qquad {}^{A}_{B}R={}^{B}_{A}R^{-1}={}^{B}_{A}R^{T}$$

* مؤلفه ستون های آن دو به دو بر هم عمودند و اندازه آنها برابر واحد است.

- توصیف چهارچوب: مجموعه ای است از چهار بردار نشان دهنده مکان و جهتگیری $\quad \{B\}=\{{}^{A}_{B}R,\ {}^{A}P_{B,ORG}\}$

- نگاشت: $\quad {}^{A}P={}^{A}_{B}T\,{}^{B}P \quad ({}^{A}P={}^{A}_{B}R\,{}^{B}P+{}^{A}P_{B,ORG})$

- تبدیل همگن: ماتریس ۴×۴ که هم دوران و هم انتقال یک تبدیل کلی را در بر می گیرد. $\quad \begin{bmatrix}{}^{A}P\\ \cdots\\ 1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}{}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{B,ORG}\\ \hline 0\ 0\ 0 & 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}{}^{B}P\\ \cdots\\ 1\end{bmatrix}$

- عملگرهای انتقالی: q اندازه انتقال در راستای بردار $\hat{Q}$ است. $\quad D_Q(q)=\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&q_x\\0&1&0&q_y\\0&0&1&q_z\\ \hline 0&0&0&1\end{array}\right] \quad {}^{A}P_2=D_Q\,{}^{A}P_1$

ویژگی مؤلفه های بردار انتقال $\quad q=\sqrt{q_x^2+q_y^2+q_z^2}$

- عملگرهای دورانی: از ماتریس دورانی تشکیل شده که بردارها را با دوران R می چرخاند. همان ماتریس دورانی است که دوران را توصیف می کند.

- معکوس تبدیل $\quad {}^{A}_{B}T^{-1}={}^{B}_{A}T=\left[\begin{array}{c|c}{}^{A}_{B}R^T & -{}^{A}_{B}R^T\,{}^{A}P_B\\ \hline \cdots & \cdots\end{array}\right]$

- زوایای اویلر: قراردادهای مجموعه زوایای اویلر که شامل ۲۴ قرارداد است. ۱۲ قرارداد مربوط به دوران حول محورهای ثابت و ۱۲ قرارداد دیگر مربوط به زوایای اویلر حول محورهای متحرک است.

مثال ۱: زوایای X-Y-Z ثابت: ابتدا حول $\hat{X}_A$ به اندازه γ، سپس حول $\hat{Y}_A$ به اندازه β و سرانجام حول $\hat{Z}_A$ به اندازه α دوران یابد به زوایای رول، پیچ و یاو معروف است. $\quad {}^{A}_{B}R=R_Z(\alpha)\,R_Y(\beta)\,R_X(\gamma)$ (پیش ضرب)

مثال ۲: زوایای اویلر Z-Y-X متحرک: ابتدا حول $\hat{Z}_B$ به اندازه α، سپس حول $\hat{Y}_B$ به اندازه β و سرانجام حول $\hat{X}_B$ به اندازه γ دوران یابد $\quad {}^{A}_{B}R=R_Z(\alpha)\,R_Y(\beta)\,R_X(\gamma)$ (پس ضرب)

* تابع $A\tan2(y,x)$ در حقیقت همان تابع $\tan^{-1}(\frac{y}{x})$ است. که در آن علامت های x و y به منظور تعیین ربعی که زاویه در آن قرار می گیرد استفاده می شود.

قرارداد محور و زاویهٔ معادل: دوران به اندازه زاویه θ حول بردار $^A\hat{K}$ که مشخصات بردار $^A\hat{K}$ فقط با دو پارامتر بیان می‌شود زیرا اندازهٔ این بردار همواره برابر واحد و نگر گرفته می‌شود. دوران از قاعده دست راست پیروی می‌کند.

$$R_K(\theta)=\begin{bmatrix} K_xK_xV\theta+C\theta & K_xK_yV\theta-K_zS\theta & K_xK_zV\theta+K_yS\theta \\ K_xK_yV\theta+K_zS\theta & K_yK_yV\theta+C\theta & K_yK_zV\theta-K_xS\theta \\ K_xK_zV\theta-K_yS\theta & K_yK_zV\theta+K_xS\theta & K_zK_zV\theta+C\theta \end{bmatrix}$$

$C\theta=\cos\theta$
$S\theta=\sin\theta$
$V\theta=1-\cos\theta$
$^A\hat{K}=[K_x\ K_y\ K_z]^T$

$$\theta=A\cos\left(\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}-1}{2}\right) \qquad K_x=\frac{r_{32}-r_{23}}{2S\theta} \qquad K_y=\frac{r_{13}-r_{31}}{2S\theta} \qquad K_z=\frac{r_{21}-r_{12}}{2S\theta}$$

قرارداد پارامترهای اویلر: از چهار عدد به نام پارامترهای اویلر استفاده می‌شود برحسب محور معادل $\hat{K}=[K_x\ K_y\ K_z]^T$ و زاویه معادل θ به صورت روبرو است

$$\varepsilon_1=K_x\sin\frac{\theta}{2} \qquad \varepsilon_2=K_y\sin\frac{\theta}{2} \qquad \varepsilon_3=K_z\sin\frac{\theta}{2} \qquad \varepsilon_4=\cos\frac{\theta}{2} \qquad \varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2=1$$

$$R_\varepsilon=\begin{bmatrix} 1-2\varepsilon_2^2-2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_3\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_3\varepsilon_4) & 1-2\varepsilon_1^2-2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon_1\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_4) & 1-2\varepsilon_1^2-2\varepsilon_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_1=\frac{r_{32}-r_{23}}{4\varepsilon_4} \qquad \varepsilon_2=\frac{r_{13}-r_{31}}{4\varepsilon_4} \qquad \varepsilon_3=\frac{r_{21}-r_{12}}{4\varepsilon_4} \qquad \varepsilon_4=\frac{1}{2}\sqrt{1+r_{11}+r_{22}+r_{33}}$$

آموزش: می‌توان بازدهی مکانیکی روبات را به مکان مطلوب حرکت داد و آن مکان را در حافظه ضبط کرد و مکانیزم جهت‌گیری‌ها با استفاده از خود روبات انجام می‌گیرد.

بیان تبدیل بردارهای آزاد شامل بردار گشتاور ^BN و سرعت ^BV

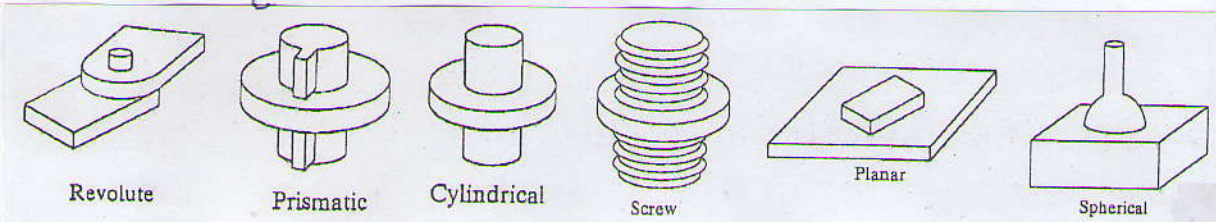
$$^AV={}^A_BR\,{}^BV \qquad ^AN={}^A_BR\,{}^BN$$

ماتریس‌های دوران خاص

$$R_x(\theta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \qquad R_y(\theta)=\begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \qquad R_z(\theta)=\begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

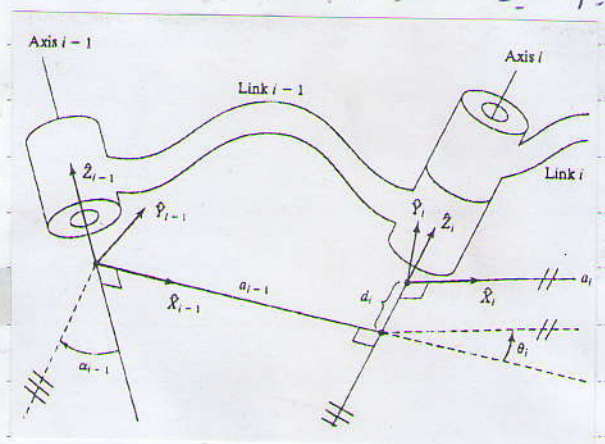
فصل سوم: سینماتیک بازوهای مکانیکی ماهر

اتصال لغزشی: برای توصیف اتصال بین دو جسم که حرکت نسبی آنها به صورت لغزش بر سطح برروی یکدیگر است به کار می‌رود.



شماره گذاری رابط‌ها: پایه ساکن بازو را شماره صفر می‌نامیم. تحقیق: عضو متحرک n رابط شماره n یک است و...

نام‌گذاری زاویه‌ها و ترتیب:



۱- محور $\hat{z}_i$ را در راستای محور مفصلی i ام قرار می‌دهیم.

۲- محور $\hat{x}_i$ را در راستای عمود مشترک $\hat{z}_i$ و $\hat{z}_{i+1}$ در نظر می‌گیریم. و اگر متقاطع بودند عمود بر صفحه گذرنده از دو محور در نظر گرفته می‌شود.

۳- چهارچوب صفر به ازای صفر شدن اولین متغیر منطبق بر چهارچوب یک شود.

a_i فاصله بین $\hat{z}_i$ و $\hat{z}_{i+1}$ اندازه‌گیری شده در راستای $\hat{x}_i$

α_i زاویه بین $\hat{z}_i$ و $\hat{z}_{i+1}$ اندازه‌گیری شده حول $\hat{x}_i$

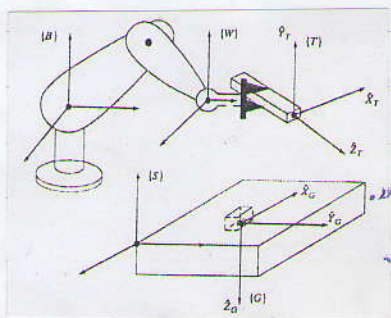
d_i فاصله بین $\hat{x}_{i-1}$ و $\hat{x}_i$ اندازه‌گیری شده در راستای $\hat{z}_i$

θ_i زاویه بین $\hat{x}_{i-1}$ و $\hat{x}_i$ اندازه‌گیری شده حول $\hat{z}_i$

$$ {}^{i-1}_{i}T = R_x(\alpha_{i-1})\, D_x(a_{i-1})\, R_z(\theta_i)\, D_z(d_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

ادغام تبدیل‌های کلی در زنجیر سینماتیکی

$$ {}^{0}_{N}T = {}^{0}_{1}T\, {}^{1}_{2}T \cdots {}^{N-1}_{N}T $$



نام چهارچوب‌های استاندارد:

- چهارچوب پایه {B} در پایه بازوی مکانیکی ماهر قرار می‌گیرد. همان {0}
- چهارچوب ایستگاه {S} در محل انجام کار (گوشه میز کار) قرار می‌گیرد.
- چهارچوب مچ دست {W} به آخرین رابط بازوی مکانیکی ماهر متصل می‌گردد.
- چهارچوب ابزار {T} به نقطه‌ای ابزاری که رباتت در دست دارد متصل شده.
- چهارچوب هدف {G} مکانی که باید ابزار توسط رباتت به آن جا انتقال یابد.

فصل چهارم: سینماتیک وارون بازوهای مکانیکی ماهر

فضای کاری: جمعی از فضاست که مجری نهایی ربات قادر است آن را تحت پوشش قرار دهد.

فضای کاری ماهر: جمعی از فضاست که مجری نهایی ربات می تواند با همه جهتگیری های خود به آن دسترسی پیدا کند.

فضای کاری دسترسی پذیر: جمعی از فضاست که مجری نهایی می تواند حداقل در یک جهتگیری خود، به آن دسترسی یابد.

جواب های چندگانه: در حل معادله سینماتیکی پیش می آید و باعث ایجاد مشکلاتی می شود. نزدیکترین جواب انتخابی بسیار معقول است. در صورتی که در سر راه حرکت بازو مانعی وجود داشته باشد به ناچار باید جواب دورتر انتخاب شود.

روش حل: معادلات غیرخطی را نمی توان با دنبال کردن الگوریتمی کلی حل کرد.

- حل عددی (f solve)
- حل بسته
  - جبری (ابتکاری) — آنچ بالا
  - هندسی (از هندسه ربات) — آنچ پایین

تکرارپذیری: دقت بازگشت ربات به نقطه «آموزش» داده شده تعیین کننده تکرارپذیری است.

دقت: میزان دقیق بودن ربات در رسیدن به نقاط محاسبه شده با استفاده از حساسه ها، دقت ربات می نامند.

دقت هر بازوی مکانیکی از تکرارپذیری آن کمتر است. با کالیبراسیون، می توان دقت ربات را از طریق تخمین زدن پارامترهای سینماتیکی ربات، افزایش داد.

فصل پنجم: ژاکوبین ها، سرعت ها و نیروهای استاتیکی

سرعت خطی و زاویه‌ای بین‌زمان

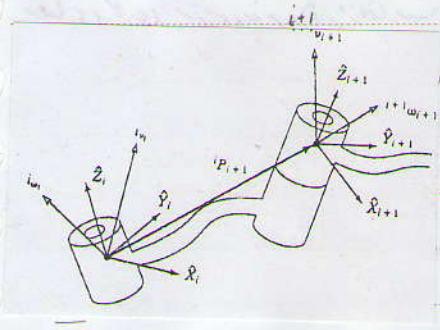
$$ {}^{A}V_{Q} = {}^{A}V_{B,ORG} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q $$

{A} نسبت به {B} ← دوران چارچوب

{B} ← سرعت مرکز چارچوب

اشاره به سرعت از رابطه‌ی به رابطه دیگر:

رابطه سرعت i نسبت به چارچوب {i+1}



مفصل دورانی:

$$ {}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} $$

سرعت زاویه‌ای:

$$ {}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,({}^{i}v_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) $$

سرعت خطی:

مفصل i+1 کشوئی:

$$ {}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i $$

$$ {}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,({}^{i}v_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} $$

ژاکوبی: یک تبدیل خطی برای مربوط ساختن سرعت مفصل ها به سرعت های دکارتی $ {}^{0}V = {}^{0}J_{v}(\theta)\,\dot{\theta} $

$ {}^{0}V = \begin{bmatrix} v_E \\ \omega_E \end{bmatrix} $ تعداد سطر ژاکوبی متناظر با تعداد درجات آزادی در فضای دکارتی و تعداد ستون ها برابر با تعداد مفصل های بازوی رباتیکی است

ژاکوبی را می توان با دیفرانسیل گیری مستقیم از معادله های سینماتیکی مکانیزم نیز بدست آورد.

در صورتی که به جای سرعت دورانی از مشتقات زوایای اویلر استفاده شود $ \dot{X} = \begin{Bmatrix} v_E \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = J_v\,\dot{q} \rightarrow J_v = \begin{bmatrix} I_{3\times3} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} J_v $

← تبدیل مشتقات زوایای اویلر به سرعت دورانی

محاسبه ژاکوبین:

$$ J_v = \begin{bmatrix} J_{L,1} & \cdots & J_{L,N} \\ J_{A,1} & \cdots & J_{A,N} \end{bmatrix} $$

	مفصل چرخشی	مفصل کشوئی
$J_{L,i}$	$(\hat{Z}_i) \times P_E^i$	$\hat{Z}_i$
$J_{A,i}$	$\hat{Z}_i$	0

ستون سوم ماتریس دوران دوم ماتریس ژاکوبین

نسبت بیان

$$ {}^{i}P_E = {}^{0}P_E - {}^{0}P_i = {}^{0}R_i\,{}^{i}_{N}T\,{}^{N}P_E $$

← تعویض بیان

← تعویض نسبت و بیان

تکینگی: اگر ماتریس ژاکوبین ناتکین باشد رابطه سرعت های مفصلی را با داشتن سرعت های دکارتی $ \dot{q} = J_v^{-1}\,V $ داریم.

حالات تکینگی:
1- در مرز فضای کاری (در هنگام کشیدگی کامل بازو یا خم شدن کامل بازو رخ می دهد)
2- در داخل فضای کاری (هنگامی که دو یا چند محور مفصلی در یک راستا قرار گیرد)

در تکینگی، یک یا چند درجه آزادی ربات در فضای دکارتی از دست می رود که در آن راستا سرعت مفصلی بینهایت باید باشد

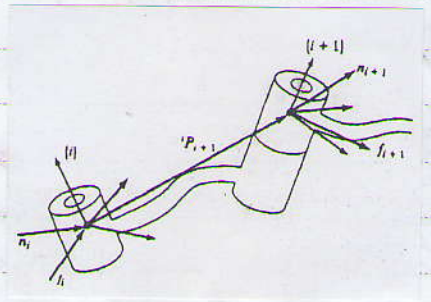
در حالت انفراد دترمینان ژاکوبین برابر صفر است. $ \det(J_v) = 0 $

ایزوتروپ (خواص در جهات مختلف یکسان است) ایزوتروپ در حرکت مجری نهایی ناشی از همسانی در ژاکوبین است و دترمینان آن برابر یک می شود.

در نزدیکی نقاط انفراد با اعمال گشتاورهای مفصلی کوچک، می توان در مجری نهایی نیروهای بزرگی ایجاد کرد.

نیروهای استاتیکی در بازوهای مکانیکی سایر

جهت بررسی نیروهای استاتیکی در بازوی مکانیکی سایر، ابتدا همه مفصل های آن بازو را قفل می کنیم (ربات ← سازه)
سپس روابط تعادل نیرو و گشتاور را نسبت به چارچوب های رابط برای هر رابط می نویسیم. سپس گشتاور استاتیکی هر مفصل را محاسبه می کنیم.



f_i = نیروهای وارد به رابط i بوسیله رابط i-1

n_i = گشتاور وارد به رابط i بوسیله رابط i-1

$$^if_i = {}^i_{i+1}R\ {}^{i+1}f_{i+1}$$

$$^in_i = {}^i_{i+1}R\ {}^{i+1}n_{i+1} + {}^iP_{i+1} \times {}^if_i$$

$\tau_i = {}^in_i^T\ {}^i\hat{z}_i$ گشتاور برای مفصل چرخشی

$F_i = {}^if_i^T\ {}^i\hat{z}_i$ نیرو برای مفصل کشویی

ژاکوبین در حوزه نیرو: با استفاده از اصل کار مجازی می توان کار انجام شده در مختصات دکارتی را با کار انجام شده در فضای مفصلی برابر قرار داد یعنی $F\,\delta X = \tau.\delta\theta$ که با استفاده از $\delta X = J\delta\theta$ داریم $\tau = J^TF$

ترانهاده ژاکوبین، نیروهای دکارتی وارد به مچ دست را به گشتاورهای مفصلی معادل می نگارد.

* اگر ماتریس ژاکوبین مربعی باشد برای بررسی تکینگی از $\det(J^TJ)=0$ و برای معکوس سازی آن از فرمول شبه معکوس $(J^TJ)^{-1}J^T$ استفاده می شود.

فصل ششم: دینامیک بازوهای مکانیکی صلب

شتاب خطی

$$^{A}\dot{V}_{Q} = {}^{A}\dot{V}_{B,ORG} + {}^{A}\dot{\Omega}_{B} \times ({}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q) + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\dot{Q}$$

شتاب زاویه‌ای

$$^{A}\dot{\Omega}_{C} = {}^{A}\dot{\Omega}_{B} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\dot{\Omega}_{C} + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\Omega_{C}$$

تانسور لختی (معیار توزیع جرم)

$$^{A}I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مثال}} I_{xx} = \iiint_V (y^2+z^2)\rho\, dv$$

عنصر لنگر لختی

$$I_{xy} = \iiint_V xy\,\rho\, dv$$

عنصر حاصلضرب لختی

$$^{A}I = {}^{C}I + m\left[P_c^T P_c I_3 - P_c P_c^T\right] \qquad {}^{A}P_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix}$$

مکان مرکز جرم

↳ ماتریس همانی 3x3

قضیه محورهای موازی

* لنگرهای لختی همواره مثبت اند ولی حاصلضرب لختی ممکن است مثبت یا منفی گردد.
* مجموع سه لنگر لختی ثابت است و به چهارچوب مرجع بستگی ندارد.
* مقادیر ویژه تانسور فوق لنگرهای اصلی آن جسم اند. بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر، محورهای اصلی جسم اند.

معادله نیوتن $F = m\dot{v}_c$ — معادله اویلر $N = {}^{C}I\dot{\omega} + \omega \times {}^{C}I\omega$

محاسبات تکراری نیوتن-اویلر

$$\left.\begin{aligned}
&{}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} && \text{انتقال سرعت دورانی}\\
&{}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{\omega}_i + {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} && \text{شتاب زاویه‌ای: مفصل چرخشی}\\
&{}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{\omega}_i && \text{شتاب زاویه‌ای: مفصل کشویی}\\
&{}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\left[{}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + {}^{i}\dot{v}_i\right] && \text{شتاب خطی مبدا ۱+ در چهارچوب} \leftarrow \text{مفصل چرخشی}\\
&{}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\left[{}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + {}^{i}\dot{v}_i\right] + 2\,{}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} && \leftarrow \text{مفصل کشویی}\\
&{}^{i+1}\dot{v}_{c\,i+1} = {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{c\,i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times ({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{c\,i+1}) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} && \text{شتاب خطی مرکز جرم:}\\
&{}^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1}\,{}^{i+1}\dot{v}_{c\,i+1}\\
&{}^{i+1}N_{i+1} = {}^{C_{i+1}}I_{i+1}\,{}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{C_{i+1}}I_{i+1}\,{}^{i+1}\omega_{i+1}
\end{aligned}\right\} \text{محاسبات تکراری } i=0 \to n$$

$$\left.\begin{aligned}
&{}^{i}f_i = {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1} + {}^{i}F_i\\
&{}^{i}n_i = {}^{i}N_i + {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{c_i} \times {}^{i}F_i + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}\\
&\tau_i = {}^{i}n_i^T\,{}^{i}\hat{Z}_i && \text{گشتاور مفصل چرخشی}\\
&\tau_i = {}^{i}f_i^T\,{}^{i}\hat{Z}_i && \text{نیروی مفصل کشویی}
\end{aligned}\right\} \text{محاسبات تکراری } i=n \to 1$$

* جهت شمول نیروی گرانش بایه $\dot{v}_0 = G$ (پایه ربات شتاب G به سوی بالا حرکت می‌کند)

روش لاگرانژ (بر پایه انرژی) کلی

انرژی جنبشی بازوی مکانیکی ماهر:

$$K=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_{c_i}^T v_{c_i}+\frac{1}{2}\,{}^{i}\omega_i^T\,{}^{i}I_i\,{}^{i}\omega_i$$

انرژی پتانسیل:

$$U=\sum_{i=1}^{n}-m_i\,{}^{0}g^T\,{}^{0}P_{c_i}$$

($^0P_{c_i}$ بردار مکان مرکز جرم را بیان می‌کند، ^0g بردار 3x1 گرانش)

$$L=K-U \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial K}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=\tau_i=Q_i$$

روش لاگرانژ اختصاصی

$$\sum_{j=1}^{N}M_{ij}\ddot q_j+\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}m_{ijk}\dot q_j\dot q_k+G_i=Q_i$$

$$M_{N\times N}=\sum_{i=1}^{N}\left\{m_i J_L^{(i)T}J_L^{(i)}+J_A^{(i)T}I_i^{c_i}J_A^{(i)}\right\} \qquad I_i^{c_i}={}^0R_i\,{}^iI_i^{c_i}\,{}^0R_i^T$$

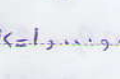
$$J_v^{(i)}=\begin{bmatrix} J_{L,1}^{(i)}\cdots J_{L,j}^{(i)} & 0\cdots 0\\ J_{A,1}^{(i)}\cdots J_{A,j}^{(i)} & 0\cdots 0\end{bmatrix}$$

	مفصل چرخشی	مفصل کشوئی
$J_{L,j}^{(i)}$	$\hat z_j\times P_{c_i}^j$	$\hat z_j$
$J_{A,j}^{(i)}$	$\hat z_j$	0

$$^0P_{c_i}^j={}^0P_{c_i}-{}^0P_j={}^0R_j\,{}^jP_{c_i}^j$$

$$m_{ijk}=\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \qquad i,j,k=1,\dots,N$$

$$G=-g^T\sum_{j=1}^{N}m_j J_{L,i}^{(j)} \qquad g=\begin{Bmatrix}0\\-9.81\\0\end{Bmatrix}$$



$$\{Q\}=\{\tau\}+J_v^T\begin{Bmatrix}f_e\\n_e\end{Bmatrix}+\dots$$

معادله فضای حالت:

$$\tau=M(q)\ddot q+V(q,\dot q)+G(q)$$

$M(q)$ ماتریس جرم، $V(q,\dot q)$ بردار گریز از مرکز و کوریولیس، $G(q)$ بردار گرانش

معادله فضای پیکربندی:

$$\tau=M(q)\ddot q+B(q)[\dot q\dot q]+C(q)[\dot q^2]+G(q)$$

$B(q)$ ماتریس $n\times\frac{n(n-1)}{2}$ از ضرایب کوریولیس، $C(q)$ ماتریسی از ضرایب گریز از مرکز

$$[\dot q\dot q]=[\dot q_1\dot q_2\ \dot q_1\dot q_3\cdots\dot q_{n-1}\dot q_n]^T$$

معادله فضای حالت دکارتی:

$$F=M_x(q)\ddot X+V_x(q,\dot q)+G(q)$$

F بردار نیروی گشتاور وارد بر مجری نهایی ربات و X بردار دکارتی نمایش مکان و جهتگیری مجری نهایی

$$M_x(q)=J^{-T}(q)M(q)J^{-1}(q) \qquad V_x(q,\dot q)=J^{-T}(q)\left(V(q,\dot q)-M(q)J^{-1}(q)\dot J(q)\dot q\right) \qquad G_x(q)=J^{-T}(q)G(q)$$

معادله گشتاور فضای پیکربندی دکارتی

$$\tau=J^T(q)\left(M_x(q)\ddot X+V_x(q,\dot q)+G_x(q)\right)$$

شمول اثرات جسم غیرصلب (اصطکاک)

$$\tau_{friction}=\underbrace{v\dot\theta}_{\text{اصطکاک ویسکوز}}+\underbrace{c\,\mathrm{sgn}(\dot q)}_{\text{اصطکاک خشک}}+f(q)$$

ضریب اصطکاک

$\dot q=0$ استاتیکی

$\dot q\neq 0$ جنبشی

وابستگی نیروی اصطکاکی به مکان مفصل (عدم دایرولی بودن)

$$\tau=M(q)\ddot q+V(q,\dot q)+G(q)+\tau_{friction}$$

فصل پنجم: تولید مسیر زمانی

روش های فضای مفصلی: با استفاده از مکان و جهتگیری مجری نهایی و بوسیله سینماتیک معکوس مقادیر مطلوب مورد نظر برای شرایط مرزی متغیرهای فضای مفاصل بدست می آید و با روش های زیر مسیر زمانی برای آن طراحی می شود.

- چندجمله‌ای درجه سوم:

$$\theta(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$$

$$a_0=\theta_0 \quad a_1=0 \quad a_2=\frac{3}{t_f^2}(\theta_f-\theta_0) \quad a_3=-\frac{2}{t_f^3}(\theta_f-\theta_0) \qquad \dot\theta(t_f)=\dot\theta_f=0,\ \theta(t_f)=\theta_f,\ \theta(0)=\theta_0$$

- چندجمله‌ای درجه سوم برای مسیری با نقاط بینابینی

$$\theta(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$$

$$a_0=\theta_0 \quad a_1=\dot\theta_0 \quad a_2=\frac{3}{t_f^2}(\theta_f-\theta_0)-\frac{2}{t_f}\dot\theta_0-\frac{1}{t_f}\dot\theta_f \quad a_3=-\frac{2}{t_f^3}(\theta_f-\theta_0)+\frac{1}{t_f^2}(\dot\theta_f+\dot\theta_0)$$

$\dot\theta$ در نقاط میانی به ۳ صورت انتخاب می گردد: ۱) تعیین سرعت مطلوب در فضای کاری و بازگشت آن در فضای مفصلی ۲) استفاده از شیب متوسط قطعات قبل و بعد ۳) استفاده از فرض پیوستگی شتاب

- چندجمله‌ای درجه پنجم

$$\theta(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+a_5t^5$$

$$a_0=\theta_0 \quad a_1=\dot\theta_0 \quad a_2=\frac{\ddot\theta_0}{2} \quad a_3=\frac{1}{2t_f^3}\left(20\theta_f-2\theta_0-(8\dot\theta_f+12\dot\theta_0)t_f-(3\ddot\theta_0-\ddot\theta_f)t_f^2\right)$$

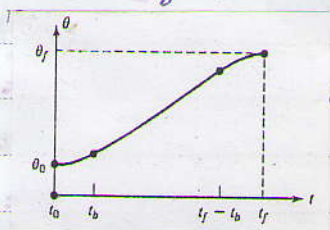
$$a_4=\frac{1}{2t_f^4}\left(30\theta_0-30\theta_f+(14\dot\theta_f+16\dot\theta_0)t_f+(3\ddot\theta_0-2\ddot\theta_f)t_f^2\right)$$

$$a_5=\frac{1}{2t_f^5}\left(12\theta_f-12\theta_0-(6\dot\theta_f+6\dot\theta_0)t_f-(\ddot\theta_0-\ddot\theta_f)t_f^2\right)$$

- مسیر خطی با بازه‌های سهموی: با انتخاب $\ddot\theta$ برحسب شرط، مقدار t_b معین می گردد. با بزرگ شدن شتاب، طول ناحیه سهموی کوتاه‌تر می‌شود

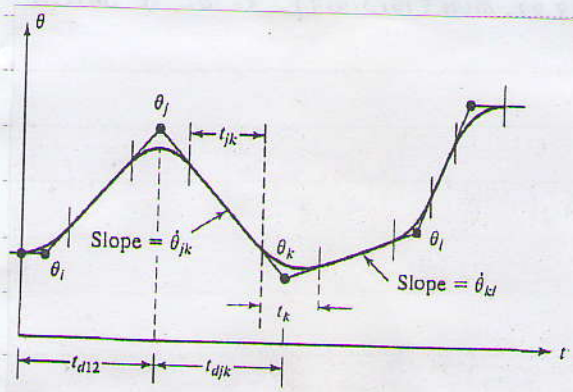
$$\ddot\theta t_b^2-\ddot\theta t t_b+\theta_f-\theta_0=0 \longrightarrow t_b=\frac{t}{2}-\frac{1}{2\ddot\theta}\sqrt{\ddot\theta^2t^2-4\ddot\theta(\theta_f-\theta_0)} \qquad \left(\text{شرط } \ddot\theta \geq \frac{4(\theta_f-\theta_0)}{t^2}\right)$$

$$\dot\theta_{\text{خطی}}=\ddot\theta t_b$$



$$\theta(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ddot\theta t^2+\theta_0 & t_0\leq t\leq t_b\\ \dot\theta(t-t_b)+\frac{1}{2}\ddot\theta t_b^2+\theta_0 & t_b\leq t\leq t_f-t_b\\ -\frac{1}{2}\ddot\theta(t-t_f)^2+\theta_f & t_f-t_b\leq t\leq t_f\end{cases}$$

- مسیر خطی با نواحی سهموی برای مسیری با نقاط بینابینی: نقاط بینابینی بوسیله خط به یکدیگر وصل شده‌اند و اطراف هر نقطه بینابینی نواحی سهموی اضافه شده‌اند.



- طول مدت ناحیه سهموی در نقطه k برابر t_k
- طول مدت قسمت خطی بین j و k برابر t_{jk}
- طول مدت کل مسیر بین j و k برابر t_{djk}
- سرعت در قسمت خطی $\dot\theta_{jk}$
- شتاب در ناحیه سهموی j برابر $\ddot\theta_j$

قطعه ابتدایی	قطعات میانی	قطعه انتهایی
$\frac{\theta_2-\theta_1}{t_{d12}-\frac{1}{2}t_1}=\ddot{\theta}_1 t_1$	$\dot{\theta}_{jk}=\frac{\theta_k-\theta_j}{t_{djk}}$	$\frac{\theta_{n-1}-\theta_n}{t_{d(n-1)n}-\frac{1}{2}t_n}=\ddot{\theta}_n t_n$
$\ddot{\theta}_1=sgn(\theta_2-\theta_1)\lvert\ddot{\theta}_1\rvert$	$\ddot{\theta}_k=sgn(\dot{\theta}_{k1}-\dot{\theta}_{jk})\lvert\ddot{\theta}_k\rvert$	$\ddot{\theta}_n=sgn(\theta_{n-1}-\theta_n)\lvert\ddot{\theta}_n\rvert$
$t_1=t_{d12}-\sqrt{t_{d12}^2-\frac{2(\theta_2-\theta_1)}{\ddot{\theta}_1}}$	$t_k=\frac{\dot{\theta}_{k1}-\dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k}$	$t_n=t_{d(n-1)n}-\sqrt{t_{d(n-1)n}^2+\frac{2(\theta_n-\theta_{n-1})}{\ddot{\theta}_n}}$
$\dot{\theta}_{12}=\frac{\theta_2-\theta_1}{t_{d12}-\frac{1}{2}t_1}$	$t_{jk}=t_{djk}-\frac{1}{2}t_j-\frac{1}{2}t_k$	$\dot{\theta}_{(n-1)n}=\frac{\theta_n-\theta_{n-1}}{t_{d(n-1)n}-\frac{1}{2}t_n}$
$t_{12}=t_{d12}-t_1-\frac{1}{2}t_2$		$t_{(n-1)n}=t_{d(n-1)n}-t_n-\frac{1}{2}t_{n-1}$

* اگر بخواهیم با توقف از یک نقطه بگذریم، نقطهٔ بینابینی در مسیر تکراری شود.
* اگر بخواهیم از نقطه بینابینی با سرعت مشخص از آن عبور کنیم دو نقطه مجازی در دو طرف آن نقطه اصلی قرار می‌دهیم (سرعت مشخص برابر شیب آن نقطه است که در صورت یکی نبودن میانگین شیب قسمت خطی قبل و بعد از آن انتخاب می‌شود)

طراحی مسیر در فضای کاری (کارتزین)

الف) با در نظر گرفتن تعداد زیادی نقاط بر روی مسیر مشخص و استفاده از سینماتیک معکوس و نگاشت نقاط در فضای مفصلی

ب) برنامه‌ریزی زمانی حرکت برای متغیرهای فضای کاری $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$

$$X \rightarrow \boxed{\text{Time Plan.}} \xrightarrow{X(t)} \boxed{\text{inv. Kin.}} \xrightarrow{q(t)}$$

* توجه شود برای جلوگیری از محو آنی دوران و زاویه اوران استفاده می‌گردد.

مشکلات هندسی مسیر کاری

۱) نقاط بینابینی غیرقابل دسترس باشد (خارج از فضای کاری باشیم)

۲) سرعت زیاد مفصل در نزدیکی نقاط تکینی

۳) وجود جواب‌های مختلف برای نقاط شروع و هدف

طراحی مسیر بهینه زمانی

برای داشتن کمترین زمان ممکن باید عملگرها در حداکثر توان خود (بیشترین شتاب در یکی از عملگرها در هر زمان) کار کنند

برای مدل دینامیکی ربات $M\ddot{q}+h(q,\dot{q})=\tau$ می‌توانیم مدل $\tau=c_1(s)\ddot{s}+c_2(s,\dot{s})$ را برحسب متغیر مسیر در فضای کاری داشته باشیم که موقعیت مجری نهایی برحسب پارامتر مسیر $X_E(s)$

$$c_1(s)=M J_r^{-1} X_{E,s}$$

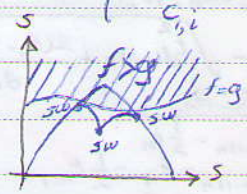
$$c_2(s)=M J_r^{-1}(X_{E,ss}\dot{s}^2-\dot{J}_r\dot{q})+h(q,\dot{q})$$

$$f_i \ll \ddot{s} \ll g_i \longrightarrow \max(f_i) \leq \ddot{s} \leq \min(g_i)$$

acceleration $\ddot{s}=f$

deceleration $\ddot{s}=g$

$$f_i(s,\dot{s}) = \begin{cases} \dfrac{\tau_{min,i} - C_{2,i}}{C_{1,i}} & C_{1,i} > 0 \\ \dfrac{\tau_{max,i} - C_{2,i}}{C_{1,i}} & C_{1,i} < 0 \end{cases} \qquad g_i(s,\dot{s}) = \begin{cases} \dfrac{\tau_{max,i} - C_{2,i}}{C_{1,i}} & C_{1,i} > 0 \\ \dfrac{\tau_{min,i} - C_{2,i}}{C_{1,i}} & C_{1,i} < 0 \end{cases}$$

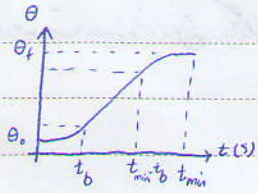


ناحیه $f>g$ به عنوان ناحیه غیرمجاز کنار گذاشته می‌شود.

مسیر بهینه زمانی برای یک مفصل

$$t_b = \frac{\dot{\theta}_{max}}{\ddot{\theta}_{max}}$$

$$t_{min} = \frac{\dot{\theta}_{max}^2 + \ddot{\theta}_{max}(\theta_f - \theta_0)}{\dot{\theta}_{max}\,\ddot{\theta}_{max}}$$



$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ddot{\theta}_{max} t^2 + \theta_0 & 0 \leq t \leq t_b \\ \dot{\theta}_{max}(t - t_b) + \left(\frac{1}{2}\ddot{\theta}_{max} t_b^2 + \theta_0\right) & t_b \leq t \leq t_{min} - t_b \\ -\frac{1}{2}\ddot{\theta}_{max}(t - t_{min})^2 + \theta_f & t_{min} - t_b \leq t \leq t_{min} \end{cases}$$

فصل هشتم: طراحی مکانیزم بازوی مکانیکی ماهر

عناصر یک سیستم روباتیک: ۱. بازوی مکانیکی و حسگرهای داخلی ۲. بخش نهایی یا ابزار انتهای بازو ۳. حسگرهای خارجی و تغذیه کننده ۴. کنترل کننده

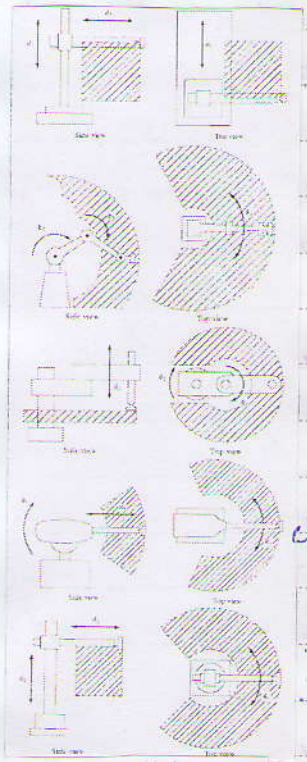
طراحی بر پایهٔ عملیات خواسته شده به علت مسائل اقتصادی و عملی برخلاف اینکه ربات اساساً قابل برنامه‌ریزی برای انجام طیف وسیعی از عملیات

تعداد درجات آزادی هر بازوی مکانیکی ماهر باید با تعداد درجات آزادی لازم برای انجام عمل مورد نظر برابر باشد.

فضای کاری یا حجم کاری با مقیاس کاری که باید انجام شود تعیین می‌گردد. جزئیات شکل فضای کاری و محل نقاط تکین نیز با اهمیت است

ظرفیت حمل بار به اندازهٔ اعضای سازه‌ای، سیستم رانش تابعی از پیکربندی ربات. درصد زمانی که بار تحمل می‌شود و بارگذاری دینامیکی

حاصل از نیروهای لختی و نیروهای وابسته به سرعت است



بازوی مکانیکی ماهر کارتزی: مفصل‌های کشویی دو به دو بر هم عمودند و سازه‌های بسیار سخت دارند

«روبات‌های قاب جرثقیل» نام دارند. حرکت‌های سه مفصل اول آن‌ها به یکدیگر وابسته نیست.

برای سه مفصل اول، نقاط تکین ایجاد نشود.

بازوی مکانیکی ماهر بند بند (مفصلی، زانویی و شبه انسانی): سازهٔ بازو کمترین تداخل را در فضای

کاری دارد و قادرند به درون فضاهای محدود دسترسی یابند. برای فضای کاری کوچکتر کم هزینه‌ترند

بازوی مکانیکی اسکارا: سه مفصل لولایی با محورهای موازی دارد که حرکت دستگیری در صفحه را

شکل می‌سازد. سه مفصل اول آن نیروهای وزن بازو و بار را تحمل نمی‌کنند. اجسام به آسانی

می‌توانند عملگرهای دو مفصل اول را در خود جای دهند.

بازوهای مکانیکی کروی: به بازوی مکانیکی بند بند شباهت دارد. اما در آن مفصل زانو با مفصل

کشویی جایگزین شده است.

بازوهای مکانیکی استوانه‌ای: از مفصل کشویی برای حرکت بازو در راستای قائم، مفصل لولایی با

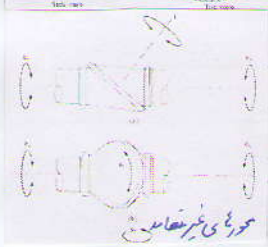
محور قائم، مفصل کشویی دیگری با محوری عمود بر محور مفصل لولایی و نوعی مچ تشکیل می‌شود.

مچ: از دو یا سه مفصل لولایی با محورهای معمولاً عمود بر هم متقاطع در یک نقطه تشکیل می‌شود

طرح جالبی شامل مچی با محورهای متقاطع در یک نقطه اما غیر متقارن است به نام «مچ سه گردن» است

عمود نبودن محورها بر یکدیگر جهتگیری‌های ایجاد می‌کند که دسترسی به آن‌ها بوسیله

این مچ غیرممکن است و معادله سینماتیکی آن حل بسته خواهد داشت



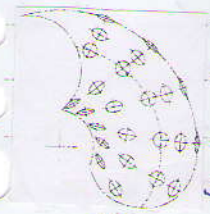
شاخص طولی سازه‌ای Q_L نسبت مجموع طولی بازو به ریشه دوم حجم فضای کاری است $Q_L = L / \sqrt[3]{W}$

مجموع طولی بازوی مکانیکی ماهر $L = \sum_{i=1}^{N} (a_i + d_i)$ (a_i طول رابط i و d_i انحراف مفصلی i در مفصل کشویی برابر فاصله طی شده)

Q_L تعریف خلاصه‌ای از اندازهٔ نسبی سازه (طول نسبی مکانیزم) مورد نیاز برای پیکربندی‌های مختلف را به منظور ایجاد حجم کاری معین ارائه می‌دهد

مقدار Q_L در طرح‌های خوب کوچک است.

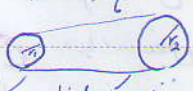
معیار مهارت w : در نقاط تکین، بازوی مکانیکی با یک یا چند درجهٔ آزادی خود را از دست می‌دهد یا برخی کارها را نمی‌تواند در آن نقطه انجام دهد
معیار مهارت w از دترمینان ژاکوبی استفاده می‌کند $w=\sqrt{\det(JJ^T)}$ و اگر بازو درجه آزادی زاید نداشته باشد $w=|\det(J)|$
هر بازوی مکانیکی خوب، دارای نواحی بزرگ از فضای کاری با مقادیر بزرگ w است. معیار مهارت را بر اساس تحلیل شتاب یا قابلیت اعمال نیرو نیز تعریف کرده‌اند.



ماتریس جرم دکارتی $M_x = J^{-T}MJ^{-1}$ قابلیت شتاب‌گیری بازو در راستاهای دکارتی گوناگون نشان می‌دهد
نمایش گرافیکی قابلیت شتاب‌گیری به صورت بیضیوار لختی $X^TM_xX=1$ معادله یک بیضیوار n بعدی را مشخص می‌کند
(n تعداد مجهول‌های X است) محورهای این بیضی‌وار در راستای بردارهای ویژهٔ M_x قرار دارند و طول این محورهای بیضیوار برابر عکس ریشهٔ دوم مقادیر ویژه است. در مرکز فضای کاری بیضیوار را بزرگ نشان از شرایط مناسب است
در مرز فضای کاری مقطع بیضیوار به صورت کشیده است که شتاب‌گیری بازو در راستای بعیدتر به دشواری صورت می‌گیرد.
ربات‌های موازی سختی بالایی دارند ولی دامنهٔ حرکتی و فضای کاری محدود دارند. دقت بالاتری دارند
درجات آزادی. فرمول گرودلر: $F=\lambda(l-n-1)+\sum_{i=1}^{n}f_i$ تعداد روابط، n تعداد کل مفصل‌ها، f_i تعداد درجات آزادی هر مفصل
$\lambda=3$ (صفحه‌ای) $\lambda=6$ (فضایی)

روش‌های کاراندازی یا عملگری
راش مستقیم: اگر کاراندازها قادر به ایجاد نیرو یا گشتاور کافی باشند مستقیماً به مفصل متصل می‌شود. بدون نیاز به واسطه انتقال قدرت یا کاهش سرعت است.
به علت طراحی کاراندازها برای سرعت‌های نسبتاً بالا و گشتاورهای پایین سیستم کاهش سرعت نیاز است و چون کاراندازها غالباً سنگین‌اند با سیستم انتقال قدرت جهت انتقال حرکت از کاراندازها به مفصل استفاده می‌شود که لختی کلی بازو به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد
چرخ‌دنده: معمول‌ترین سیستم‌های کاهش سرعت و انتقال قدرت است ولی دو عیب لقی و اصطکاک دارند

$\dot{\theta}_o=\dot{\theta}_i/\eta \qquad \tau_o=\eta\tau_i$



نوارهای انعطاف‌پذیر، کابل‌ها و تسمه‌ها دارای انعطاف‌پذیری و اصطکاک زیاد دارند $\eta=\frac{r_2}{r_1}$
پیچ‌های هدایت (جلو برا) پیچ بلبرینگی حرکت دورانی را به حرکت خطی تبدیل می‌کند و کاهش سرعت زیاد در فضای کم را فراهم می‌کند

$\delta=\frac{mgl^3}{3EI}$

$\delta=\frac{mgl^3}{8EI}$

$k=\frac{G\pi d^4}{32l}$ سختی پیچشی

سختی: سختی زیاد کل سازه و سیستم راش مزیت است برای عدم وجود جگر در فضای کاری و عدم ایجاد پدیده تشدید. سختی دو عضو موازی $K_{Parallel}=k_1+k_2$ دو عضو سری $\frac{1}{K_{series}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$
سختی تسمه: $K=\frac{AE}{l}$ A مساحت مقطع تسمه E مدول کشسانی تسمه l طول آزاد تسمه
سختی چرخ‌دنده: $K=C_gbr^2$ r شعاع چرخ‌دنده خروجی، b پهنای رویهٔ چرخ‌دنده C_g برای فولاد 1.34×10^{10}
* چرخ‌دنده‌ها سختی مؤثر سیستم راش را نیز به اندازهٔ ضریب η^2 تغییر می‌دهند $K_o=\eta^2K_i$
* غالباً سیستم راش در مقابل بازوی مکانیکی، انعطاف‌پذیری بیشتری ایجاد می‌کند $\tau_o=K_o\delta\theta$

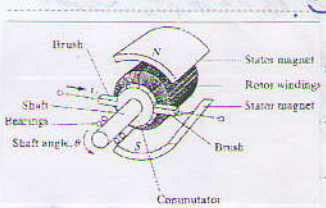
$\omega_{res}=\sqrt{\frac{g}{\delta_{total}}}=\sqrt{\frac{K}{m}}$

کاراندازها

سیلندرهای هیدرولیکی یا کاراندازهای پره‌ای: سرعت عملکرد این کاراندازها به سیستم پمپ و مخزن ذخیره (آکومولاتور) بستگی دارد ولی به تجهیزات بسیاری در دستگاه‌های هیدرولیکی نیاز دارد. به سبب نشت روغن، کارکرد تمیزی ندارند و در برخی کاربردها مناسب نیستند. به دلیل وجود اصطکاک در کاسه‌نمدها نمی‌توان نیروهای کاراندازها را با دقت اعمال کرد.

سیلندرهای بادی (پنوماتیکی): علاوه بر مزایای دستگاه‌های هیدرولیکی، کارکرد تمیزتری دارند اما به دلیل تراکم‌پذیری هوا و وجود اصطکاک زیاد در کاسه‌نمدها، کاراندازهای بادی برای کنترل دقیق حرکت‌های باز و مناسب نیستند.

موتورهای الکتریکی: کنترل‌پذیری و سادگی اتصال آنها به دستگاه‌ها، کاربردشان مناسب است.

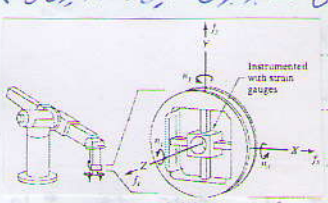


- موتورهای جریان مستقیم DC جاروبک‌دار از نظر کنترل و اتصال، ساده‌ترین دستگاه‌هستند. جریان الکتریکی به وسیله جاروبک‌هایی که با کموتاتور در حال دوران تماس دارند، به سیم‌پیچ‌های روتور هدایت می‌شوند. سایش جاروبک‌ها و اصطکاک در موتور، مشکلاتی را ایجاد می‌کند. عامل محدودکننده گشتاور خروجی این موتورها، گرم شدن بیش از حد سیم‌پیچ‌ها است.
- موتورهای بدون جاروبک مشکلات سایش و اصطکاک را برطرف می‌کنند که سیم‌پیچ‌ها ساکن می‌مانند و میدان مغناطیسی دوران می‌کند و ساده‌تر خنک می‌شوند.
- موتورهای جریان متناوب AC و موتورهای پله‌ای دارای مشکلات به ترتیب دشواری کنترل موتورهای AC و پایین بودن قابلیت ایجاد گشتاور موتورهای پله‌ای است و کاربرد محدودی دارند.

حس مکان و نیرو

تقریباً عمل‌ترین روش نصب حساسه‌ها مستقیماً بر روی محور کاراندازها می‌باشد و از کرنش‌سنج‌های فلزی، برطرف‌کننده‌ها، پتانسیومترها و دورسنج‌ها استفاده می‌شود.

جهت حس نیرو از کرنش‌سنج استفاده می‌شود که در سه محل قرار می‌گیرند: ۱. در محل کاراندازهای مفصل (گشتاور خروجی کاراندازها را اندازه‌گیری می‌کنند) ۲. بین مچ‌بند و آخرین مفصل «حساسه‌های مچی» (نیروها و گشتاورهای وارد بر مچ‌بند نهایی را اندازه‌گیری می‌کنند) ۳. در سر انگشتان مچ‌بند نهایی.



کرنش‌سنج‌ها با تغییر شکل خمشی نیز کشیده شده و مقاومت الکتریکی آنها کاهش پیدا می‌کند.

حساسه‌های ربات به کنترل‌کننده اجازه می‌دهند تا بردار θ از مکان‌های مفصلی و بردار $\dot{\theta}$ از سرعت مفصلی را بخوانند.

فصل نهم: کنترل خطی بازوهای مکانیکی صلب

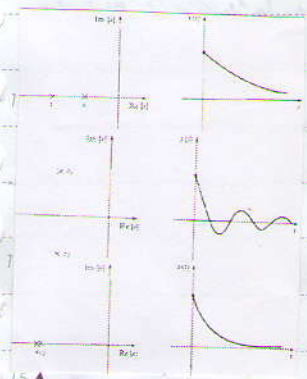
- با داشتن مدل دینامیکی کامل، دقیق و فاقد نویز یا اغتشاشات دیگر $\tau = M\ddot{\Theta}_d + V + G$ می توان کنترل مدار باز داشته باشیم
- تنها راه ساختن سیستم کنترلی با عملکرد خوب، گرفتن پسخوراند برای محاسبه خطای سرو از طریق یافتن اختلاف بین مکان مورد نظر و مکان واقعی به کار می رود و محاسبه گشتاورهای کارانداز لازم به گونه ای است که خطاهای سرو کاهش یابد. حصول اطمینان از عملکرد
- سیستم مدار بسته با معیار پایداری سیستم سنجیده می شود که با میرایی نوسانی و اغتشاشات متوسط خطای سرو کاهش می یابد.
- مسئله کنترل ربات ها به صورت چند ورودی و چند خروجی MIMO است ولی با مستقل سازی دینامیک مفاصل از هم هر مفصل به صورت سیستم جداگانه ای یک ورودی و یک خروجی SISO کنترل می شود

یادآوری سیستم خطی درجه دوم:

معادله مشخصه $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ ← نسبت یا ضریب میرایی ، ← ساده طبیعی

فرکانس طبیعی میرا $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$s = -\xi\omega_n \pm i\omega_d$



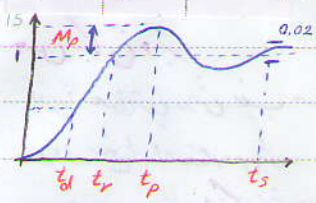
$\xi > 1$ فوق میرا: دو ریشه حقیقی و نا مساوی $x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$

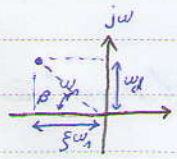
$0 < \xi < 1$ زیر میرا: دو ریشه مختلط $x(t) = c_1 e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t) + c_2 e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t)$

$\xi = 0$ نا میرای نوسانی: دو ریشه موهومی محض

$\xi < 0$ ناپایدار: قسمت حقیقی ریشه ها مثبت

$\xi = 1$ میرای بحرانی: دو ریشه حقیقی و مساوی $x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 t e^{s_2 t}$





مشخصات پاسخ گذرا برای سیستم درجه دوم:

$\xi = \cos\beta$

$t_r = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\xi\omega_n}\right) = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} \simeq \frac{1.8}{\omega_n}$

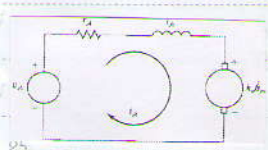
$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$

$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n}$ 2% $\frac{3}{\xi\omega_n}$ 5%

$\xi = 1 \begin{cases} t_r \simeq \frac{3.5}{\omega_d} \\ M_p = 0 \\ t_s = \frac{6}{\omega_n} \end{cases}$

$M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$

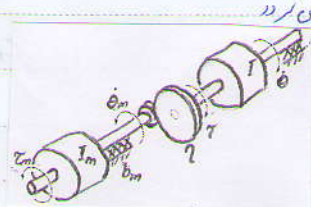
* مصالحه بین زمان نشست t_s محدود و میزان فراجهش محدود به انتخاب $\xi = 0.707$ ($\beta = 45°$) می انجامد.
* با انتخاب k_p بزرگ خطای حالت ماندگار صفر و پاسخ به اغتشاشات حذف می گردد ولی برای ورودی شیب و درجه دو خطای حالت ماندگار ثابت و بینهایت می گردد



$\tau_m = k_m i_a$

$v = k_e \dot{\theta}_m$

$L_a\frac{di_a}{dt} + r_a i = v_a - k_e\dot{\theta}_m$

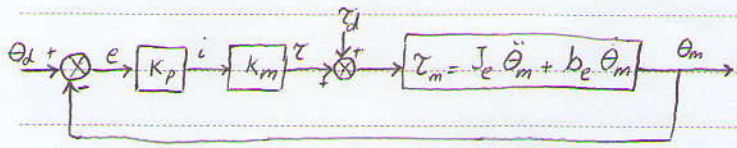


$\tau_m = (I_m + \frac{I}{\eta^2})\ddot{\theta}_m + (b_m + \frac{b}{\eta^2})\dot{\theta}_m$

$\tau = \underbrace{(I + \eta^2 I_m)}_{\text{لختی موتر}}\ddot{\theta} + \underbrace{(b + \eta^2 b_m)}_{\text{میرایی موتر}}\dot{\theta}$

عوامل محدود کننده انتخاب K_p: ۱- محدودیت عملگر i_{max} ۲- وجود نویز ۳- مسئله پایداری ۴- حد فرکانس طبیعی سیستم $\omega_n \le \frac{1}{2}\omega_s$

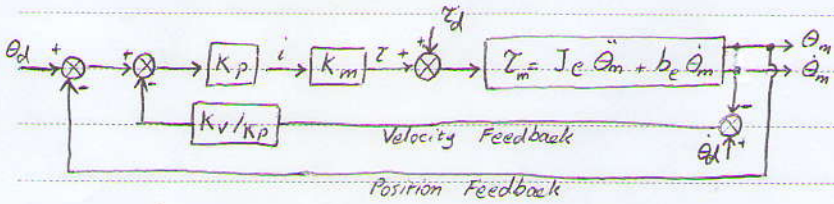
کنترلر Proportional



معادله مدار بسته $J_e\ddot{\theta}_m + b_e\dot{\theta}_m + K_pK_m\theta_m = K_pK_m\theta_d + \tau_d \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K_pK_m}{J_e}}\ ,\ \xi = \frac{b_e}{2\sqrt{J_eK_pK_m}}$

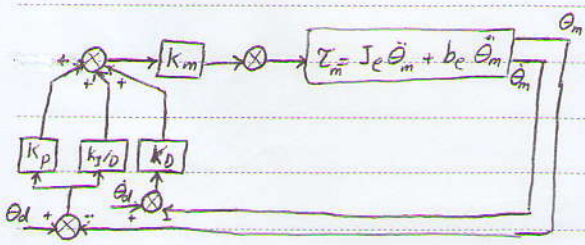
معادله خطا $J_e\ddot{e}_m + b_e\dot{e}_m + K_pK_me = J_e\ddot{\theta}_d + b_e\dot{\theta}_d + \tau_d$

کنترلر PD - Action



معادله مدار بسته $J_e\ddot{\theta}_m + (b_e + K_vK_m)\dot{\theta}_m + K_pK_m\theta_m = K_pK_m\theta_d + \tau_d \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K_pK_m}{J_e}}\ ,\ 2\xi\omega_n = \frac{b_e + K_vK_m}{J_e}$

کنترلر PID



ناقص